REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION **LYCEE BIR LAHMAR** **AS : 2020/2021**	**Discipline : Mathématiques** **Section: 3^{ieme} Mathématiques**
Prof : GARI. Habib **Décembre-2020**	**Durée : 2 heures** — **Coefficient : 4** Devoir de synthèse n°1

Exercice n°1 : (6points)

I) *Soit g la fonction définie par* : $g(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1}$

1. *Déterminer* l'ensemble *de définition de g*.
2. (*a*) *Justifier la continuité de g sur* son ensemble de définition.
   (*b*) *Montrer que l'équation* $g(x) = x^2$ *admet au moins une solution dans* $]1, 2[$.
3. (*a*) *Montrer que pour tout* $x \in Dg$, $g(x)=\sqrt{x+1}+1$
   (*b*) *En déduire que g est prolongeable par continuité en* 0.

II) *Soit f la fonction définie sur* $\mathbb{R}^*$ *par* :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3+1}{x+1} & \text{si} \quad x<-1 \\ f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-(1+x)}{x} & \text{si} \quad -1\leq x<0 \\ f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1}+a & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

1. *Etudier la continuité de f en* (−1).
2. (*a*) *Montrer que* $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-1$
   (*b*) *Déterminer a pour que f admet un prolongement par continuité en* 0.
3. *Déterminer le domaine de continuité de f*. (*justifier*).

Exercice n°2 : (4points)

Soit f et g deux fonctions definies sur IR telle que g est une fonction paire

Et vérifiant $f(-x)+2f(x)=g(x)$

1. Montrer que f est paire
2. Sachant que pour tout $x\in[0,+\infty[$ on a $f(x)=3x+E(x)+1$
   (a)Calculer $f(-1)$
   (b)Déterminer l'expression de $f(x)$ pour $x\in]-\infty,0[$
3. (a) Etudier le sens de variation de f sur $[0,+\infty[$
   (b) Déduire le sens de variation de f sur $]-\infty,0]$

Exercice n°3 : (5 points)

On considère dans un plan un rectangle ABCD de centre O tel que : AD = 6 et AB = 8 .

Soient E et F les points définis par $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{BF} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

1. (a) Vérifier que $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EF} = 36$. En déduire $\cos \widehat{AEF}$

   (b) Calculer AF et vérifier que FO = $\sqrt{41}$

2. (a) Calculer $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CE}$.

   (b) En déduire que les droites (AC) et (EF) sont perpendiculaires.

3. Soit $(\Gamma) = \{M \in \mathcal{P} ,\ 3MF^2 + MC^2 = 148\}$

   (a) Vérifier que O appartient à (Γ)

   (b)Montrer que B est le barycentre des points pondérés (C,1) et (F,3)

   et caractériser (Γ)

Exercice n°4 : (5 points)

Le plan est orienté dans le sens direct

Dans la figure de l'annexe ABC est un triangle rectangle et isocèle en B tel que

$\left(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

K est le point d'intersection de $[BC]$ avec la bissectrice de BAC et J est le milieu du segment $[AC]$ Soit I le point d'intersection de (AK) et (BJ).

1. Montrer que $dét\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BJ}\right) = \frac{AC^2}{4}$.

2. Déterminer la mesure principale de chacun des angles orientés $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}\right)$; $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AK}\right)$

   et $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{KA}\right)$

3. (a) Démontrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{BJ}, \overrightarrow{KA}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{CB}}\right)[2\pi]$

   (b) Quelle est la nature du triangle BKI ? Justifier.

4. Soit (C) le cercle de centre B et passant par K. (C) coupe le segment $[AB]$ en D.

   (a) Justifier que $\left(\widehat{\overrightarrow{DK}, \overrightarrow{DI}}\right) \equiv \frac{\pi}{8}[2\pi]$

   (b) Représenter l'ensemble E des points M du plan tels que $\left(\widehat{\overrightarrow{MK}, \overrightarrow{MI}}\right) \equiv \frac{\pi}{8}[2\pi]$

   (c) Montrer que les points D, I et C sont alignés

Annexe (exercice n°4)